LABORATORIO DI MATEMATICA

venerdì 16 febbraio 2024 09:20

$$\int \frac{1}{2x^2 - x - 1}\,dx$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x+1)$$

$$\frac{1}{2x^2-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1) + B(x-1)}{(x-1)(2x+1)}$$

$$1 = (2A + B)x + A - B$$

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -2A \\ 3A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{2}{3} \\ A = +\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{2x^2-x-1}\,dx = \int +\frac{1}{3}\,\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{2x+1}\,dx$$

$$= +\frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\log|2x+1| + C$$

$$= \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}\log|2x+1| + C$$

$$\int \frac{1}{2x^2+x+1}\,dx$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}\,i$$

$$\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{A(4x+1)}{2x^2+x+1} + \frac{B}{2x^2+x+1}$$

$$1 = 4Ax + A + B$$

$$\begin{cases} 4A = 0 \\ A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{2x^2+x+1}\,dx = \int \cancel{\frac{0(4x+1)}{2x^2+x+1}} + \frac{1}{2x^2+x+1}\,dx$$

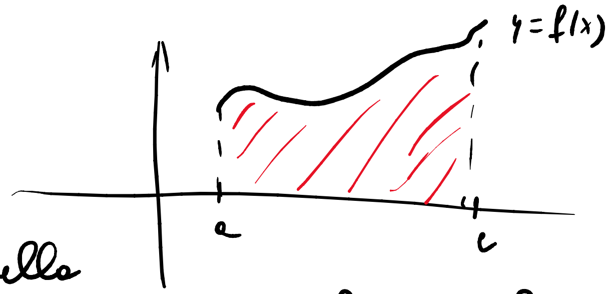
$$= \int \frac{1}{2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2\right)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\ \arctan\left(\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{17}}{4}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{17}}\ \arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{17}}\right) + c.$$

Integrali definiti

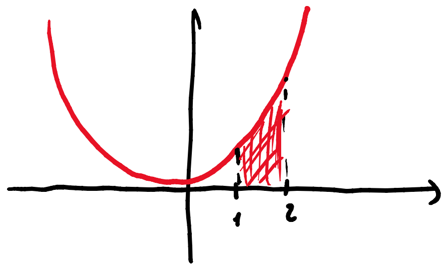


$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Rappresenta l'area (con segno) della regione di piano compresa tra l'asse x e il grafico di f.

Se $\int f(x)\, dx = F(x) + c$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$



$$\int_1^2 x^2\, dx = \ ?$$

$$\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\int_1^2 x^2\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

---

a) $\int \frac{x}{x^2+3x-4}\, dx$

h) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x-4}\,dx$

---

a) $\Delta = 9+16=25 \qquad x_{1,2} = \frac{-3\pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

$x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$

$$\frac{x}{x^2+3x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x-1)}{(x-1)(x+4)}$$

$$x = (A+B)x + 4A - B$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 4A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5A=1 \\ B=4A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{5} \\ B=\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{x^2+3x-4}\,dx = \int \frac{1}{5}\frac{1}{x-1} + \frac{4}{5}\frac{1}{x+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\log|x-1| + \frac{4}{5}\log|x+4| + C.$$

b) $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x-4}\,dx$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x-4}\,dx = \int \frac{(e^x)^2}{(e^x)^2+3e^x-4}\,dx \quad *$$

Sostituzione $\quad y=e^x \qquad dy = (e^x)'\,dx = e^x\,dx$

$[\,y=f(x) \qquad dy = f'(x)\,dx\,]$

$$* \int \frac{e^x}{(e^x)^2+3e^x-4}\,\overbrace{e^x\,dx}^{dy}$$

$$= \int \frac{y}{y^2+3y-4}\,dy = \frac{1}{5}\log|y-1| + \frac{4}{5}\log|y+4| + C$$

$$= \frac{1}{5}\log|e^x-1| + \frac{4}{5}\log|e^x+4| + C$$

$$\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x-4}\,dx = \left[\frac{1}{5}\log|e^x-1| + \frac{4}{5}\log|e^x+4|\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{5}\log|e^2-1| + \frac{4}{5}\log(e^2+4)$$

$$- \frac{1}{5}\log|e-1| - \frac{4}{5}\log|e+4|$$

ESEMPIO

$$\int \frac{\log x - 1}{x(\log^2 x + \log x + 1)}\,dx \qquad \begin{aligned} y &= \log x \\ dy &= \frac{1}{x}\,dx \end{aligned}$$

$$= \int \frac{\log x - 1}{\log^2 x + \log x + 1} \underbrace{\frac{1}{x}\,dx}_{dy}$$

$$= \int \frac{y-1}{y^2+y+1}\,dy$$

ESEMPIO

$$\int \frac{1}{2x-\sqrt{x}-1}\,dx \qquad \begin{aligned} y &= \sqrt{x} \\ dy &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \end{aligned}$$

$$= \int \frac{2\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int \frac{2y}{2y^2-y-1}\,dy = 2\int \frac{y}{2y^2-y-1}\,dy$$

Equazioni differenziali:

Sono equazioni in cui compaiono una funzione incognita $y(x)$ e alcune delle sue derivate.

ESEMPIO

$y' = y\,x$ cioè $y'(x) = y(x)\,x$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x$$

$$(\log|y(x)|)' = x$$

$$\log|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$|y(x)| = e^{\frac{1}{2}x^2+c}$$

$$y(x) = \pm e^{\frac{1}{2}x^2+c}.$$

Tutte le funzioni del tipo

$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2+c} \quad \vee \quad y(x) = -e^{\frac{1}{2}x^2+c}$ sono soluzioni

$\left(y'(x) = e^{\frac{1}{2}x^2+c} \cdot x = y(x) \cdot x \right).$

Equazioni lineari di II ordine:

$$a y'' + b y' + c y = g(x).$$

- $\boxed{\text{Se } g(x) = 0}$ l'equazione si dice omogenea e la soluzione generale si determina in modo semplice considerando il polinomio caratteristico

$$p(t) = a t^2 + b t + c$$

Si considera $\Delta = b^2 - 4ac$.

1) Se $\Delta > 0$: $p(t)$ ha due radici t_1, t_2. La soluzione generale di $a y'' + b y' + c y = 0$ è

$$y(x) = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x}$$

2) Se $\Delta = 0$: $p(t)$ ha un'unica radice reale t_1 e la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_1 x} \cdot x$$

3) Se $\Delta < 0$, $p(t)$ ha due radici complesse $\alpha \pm i\beta$. La soluzione generale è

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

ESEMPI

- $2y'' + 7y' - 9y = 0$

  Equazione lineare di 2° ordine omogenea

  Polinomio caratteristico: $p(t) = 2t^2 + 7t - 9$

  $\Delta = 49 + 72 = 121 > 0$

  $t_{1,2} = \dfrac{-7 \pm 11}{4} \begin{cases} 1 \\ -\frac{9}{2} \end{cases}$

  La soluzione generale è $y(x) = C_1 e^{1\cdot x} + C_2 e^{-\frac{9}{2}x}$
  $= C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{9}{2}x}$

- $y'' + 2y' + y = 0$

  Eq. lineare di 2° ordine omogenea.

  $p(t) = t^2 + 2t + 1 \qquad \Delta = 4 - 4 = 0 \qquad t_1 = \frac{-2}{2} = -1$

  $y(x) = C_1 e^{-1\cdot x} + C_2 e^{-1\cdot x}\cdot x$
  $= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} x.$

- $y'' + 2y' + 5 = 0$

  $p(t) = t^2 + 2t + 5 \qquad \Delta = 4 - 20 = -16 < 0$

  $t_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \qquad \alpha = -1,\ \beta = 2.$

  Allora

  $y(x) = C_1 e^{-1\cdot x}\cos(2x) + C_2 e^{-1\cdot x}\sin(2x)$
  $= C_1 e^{-x}\cos(2x) + C_2 e^{-x}\sin(2x)$

Equazioni lineari di 2° ordine non omogenee.

$$a y'' + b y' + c y = g(x).$$

Fatto: La soluzione generale è del tipo $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$ dove $y_0(x)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea $a y'' + b y' + c y = 0$ e $\bar{y}$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Come si trova $\bar{y}$?

Metodo di similarità: c'è una soluzione $\bar{y}(x)$ che è "simile" a $g(x)$.

Ad esempio se $g(x)$ è un polinomio di grado n allora $\bar{y}(x)$ è un polinomio di grado al più n, purché 0 non sia una radice del polinomio caratteristico.

Se 0 è una radice del polinomio caratteristico di molteplicità m allora $\bar{y}(x) = x^m q(x)$ con $q(x)$ polinomio di grado $\leq n$.

Ricapitolando, se $g(x)$ è un polinomio, per risolvere $a y'' + b y' + c y = g(x)$ si procede in 3 passi:

1) Si trova la soluzione generale $y_0(x)$ dell'equazione $a y'' + b y' + c y = 0$. Si utilizzano le regole viste prima basate sul polinomio caratteristico.
2) Si determina la soluzione particolare $\bar{y}(x)$
3) La soluzione dell'equazione non omogenea è $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$.

ESEMPIO 1

$$2y'' - y' - 6y = x+1$$

1) Risolviamo l'eq. omogenea $2y'' - y' - 6y = 0$.

Polinomio caratteristico $p(t) = 2t^2 - t - 6$

$\Delta = 1 + 48 = 49$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

La sol. generale dell'eq. omogenea è $y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

2) Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$.

$g(x) = x+1$ è un polinomio di grado 1.

$\bar{y}(x) = Ax + B$ Vogliamo $2\bar{y}'' - \bar{y}' - 6\bar{y} = x+1$.

$\bar{y}'(x) = A$

$\bar{y}''(x) = 0$

Sostituendo nell'equazione:

$2 \cdot 0 - A - 6(Ax+B) = x+1$

$-6Ax - A - 6B = x+1$

$\begin{cases} -6A = 1 \\ -A - 6B = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} - 6B = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ 6B = \frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6} \end{cases}$

$\begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = -\frac{5}{36} \end{cases}$ Quindi abbiamo $\bar{y}(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{5}{36}$

3) Conclusione: la soluzione generale dell'equazione è:

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{1}{6}x - \frac{5}{36}.$$

ESEMPIO

$$y'' + 4y' = 4x - 1$$

- Risolviamo l'equazione omogenea $y'' + 4y' = 0$.

$p(t) = t^2 + 4t = t(t+4) \Rightarrow t_1 = 0 \vee t_2 = -4$.

La sol. generale dell' eq. omogenea è:

$$y_0(x) = c_1 e^{0\cdot x} + c_2 e^{-4x} = c_1 + c_2 e^{-4x}.$$

- Cerchiamo la soluzione particolare $\bar{y}$.

$g(x) = 4x - 1$

$\bar{y}(x) = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$

$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$

$\bar{y}''(x) = 2A$ Vogliamo che $\bar{y}'' + 4\bar{y}' = 4x - 1$.

$$2A + 4(2Ax + B) = 4x - 1$$
$$2A + 8Ax + 4B = 4x - 1$$
$$8Ax + 2A + 4B = 4x - 1$$

$$\begin{cases} 8A = 4 \\ 2A + 4B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ 1 + 4B = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$ quindi $\bar{y}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

- Conclusione: la soluzione generale dell'equazione non omogenea è $y(x) = c_1 + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$.

ESEMPIO

$$2y'' + y' + 5 = 5x^2 + 2x + 3$$

- Si risolve l'eq. omogenea $2y'' + y' + 5 = 0$

$p(t) = 2t^2 + t + 5$

$\Delta = 1 - 40 = -39$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-39}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{39}\,i}{4} = -\frac{1}{4} \pm i\,\frac{\sqrt{39}}{4}$$

$$y_0(x) = c_1 e^{-\frac{1}{4}x} \cos\left(\frac{\sqrt{39}}{4}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{39}}{4}x\right)$$

- Cerchiamo la soluzione particolare $\bar{y}$.

$g(x) = 5x^2 + 2x + 3$

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$
$$\bar{y}''(x) = 2A$$

Vogliamo che
$$2\bar{y}'' + \bar{y}' + 5 = 5x^2 + 2x + 3$$

$$2(2A) + 2Ax + B + 5(Ax^2 + Bx + C) = 5x^2 + 2x + 3$$
$$4A + 2Ax + B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 5x^2 + 2x + 3$$
$$5Ax^2 + 2Ax + 5Bx + 4A + B + 5C = 5x^2 + 2x + 3$$

$$\begin{cases} 5A = 5 \\ 2A + 5B = 2 \\ 4A + B + 5C = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ 4 + 5C = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = x^2 - \frac{1}{5}$$

- Conclusione: la sol generale dell'equazione di partenza è $y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{4}x}\cos\left(\frac{\sqrt{37}}{4}x\right) + C_2 e^{-\frac{1}{4}x}\sin\left(\frac{\sqrt{37}}{4}x\right) + x^2 - \frac{1}{5}$.

ESERCIZI

1) $4y'' - 4y' + 5y = 3x - 2$
2) $y'' + 2y' - 3y = 3x - 1$
3) $y'' - 4y' + 3y = 6x - 5$
4) $4y'' - 4y' + y = x^2 - 20$
5) $y'' - 2y' - 3y = 3x$
6) $y'' + 8y' + 25y = 10$

1) • Risolviamo l'equazione omogenea $4y'' - 4y' + 5y = 0$

Pol. caratteristico: $p(t) = 4t^2 - 4t + 5 \qquad \Delta = 16 - 80 = -64 < 0$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{8} = \frac{4 \pm 8i}{8} = \frac{1}{2} \pm i$$

$$y_0(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos x + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin x$$

• Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x) = Ax + B$

$\bar{y}'(x) = A$

$\bar{y}''(x) = 0$

$$4 \cdot 0 - 4A + 5(Ax + B) = 3x - 2$$

$$-4A + 5Ax + 5B = 3x - 2$$

$$\begin{cases} 5A = 3 \\ -4B + 5B = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ 5B = -2 + 4A = -2 + \frac{12}{5} = +\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ B = +\frac{2}{25} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{3}{5}x + \frac{2}{25}$$

• $y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos x + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin x + \frac{3}{5}x + \frac{2}{25}$

---

2) $y'' + 2y - 3y = 3x - 1$

• Risolviamo l'eq. omogenea $y'' + 2y' - 3y = 0$.

$p(t) = t^2 + 2t - 3$ $\quad\quad$ $\Delta = 4 + 12 = 16$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

• Cerchiamo una sol. particolare $\bar{y}(x) = Ax + B$

$\bar{y}'(x) = A$

$\bar{y}''(x) = 0$

$$0 + 2A - 3(Ax + B) = 3x - 1$$

$$2A - 3Ax - 3B = 3x - 1$$

$$\begin{cases} -3A = 3 \\ 2A - 3B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{+1+2A}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = -x - \frac{1}{3}$$

• $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} - x - \frac{1}{3}$

---

3) $y'' - 4y' + 3y = 6x - 5$

• Risolviamo l'eq. omogenea $y'' - 4y' + 3y = 0$

$p(t) = t^2 - 4t + 3 \qquad \Delta = 16 - 12 = 4$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$y_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$$

• Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x) = Ax + B$

$\bar{y}'(x) = A$

$\bar{y}''(x) = B$

$$0 - 4A + 3Ax + 3B = 6x - 5$$

$$\begin{cases} 3A = 6 \\ -4A + 3B = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ 3B = -5 + 4A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = 2x + 1$$

• $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + 2x + 1$

---

4) $4y'' - 4y' + 1 = x^2 - 20$

• Risolviamo l'eq. omogenea $4y'' - 4y' + 1 = 0$

$p(t) = 4t^2 - 4t + 1 \qquad \Delta = 16 - 16 = 0 \qquad t_1 = \frac{1}{2}$

$$y_0(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \cdot x$$

- Cerchiamo una sol. particolare

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$
$$\bar{y}''(x) = 2A.$$

$$4(2A) - 4(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = x^2 - 20$$
$$Ax^2 - 8Ax + Bx + 8A - 4B + C = x^2 - 20$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -8A + B = 0 \\ 8A - 4B + C = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 8 \\ C = 4 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = x^2 + 8x + 4$$

- $y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} x + x^2 + 8x + 4$

---

5) $y'' - 2y' - 3y = 3x$

- Risolviamo $y'' - 2y' - 3y = 0$

$p(t) = t^2 - 2t - 3$ $\quad \Delta = 4 + 12 = 16$ $\quad t_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$$y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

- Cerchiamo

$$\bar{y}(x) = Ax + B$$
$$\bar{y}'(x) = A$$
$$\bar{y}''(x) = 0$$

$$0 - 2A - 3(Ax + B) = 3x$$
$$-2A - 3Ax - 3B = 3x$$

$$\begin{cases} -3A = 3 \\ -2A - 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = -x + \frac{2}{3}$$

- $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - x + \frac{2}{3}$

---

6) $y'' + 8y' + 25y = 10$

- Risolviamo prima $y'' + 8y' + 25 = 0$

$p(t) = t^2 + 8t + 25 \Rightarrow \Delta = 64 - 100 = -36$

$r_{1,2} = \dfrac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$

$y_0(x) = c_1 e^{-4x}\cos(3x) + c_2 e^{-4x}\sin(3x)$

- Cerchiamo una sol. particolare $\bar{y}(x) = A$.

$\bar{y}'(x) = 0$

$\bar{y}''(x) = 0$

$0 + 0 + 25A = 10 \Rightarrow A = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

$\bar{y}(x) = \frac{2}{5}$

- $y(x) = c_1 e^{-4x}\cos(3x) + c_2 e^{-4x}\sin(3x) + \frac{2}{5}$.